MAT 201 FİNAL ÇALIŞMA SORULARI

1) $\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$(x, y) \oplus (x', y') = (xx', yy')$$
$$r \odot (x, y) = (rx, ry + 1)$$

işlemleri tanımlanıyor. Bu iki işleme göre $\mathbb{R}^2$ bir vektör uzayı mıdır? Neden?

Cevap: Değildir.

2) $\mathbb{R}^3$ üzerinde

$$(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1^2 + x_2^2, y_1^2 + y_2^2, z_1^2 + z_2^2)$$
$$r \odot (x, y, z) = (rx, ry, rz)$$

işlemleri tanımlanıyor. Bu iki işleme göre $\mathbb{R}^3$ bir vektör uzayı mıdır? Neden?

Cevap: Değildir.

3) Aşağıda bazı vektör uzaylarının bazı alt kümeleri verilmiştir. Vektör uzayında tanımlı standart işlemlere göre verilen alt kümenin alt uzay olup olmadığını gösteriniz. Alt vektör uzayı olanlar için birer taban bulunuz.

a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; abc = 0, \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \middle| \; a + b = c + d, \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbf{M}_{23}$

c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbf{M}_{23}$

d) $D = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; a < b < c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

e) $E = \{a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \mid a_1 = a_2, \quad a_0 = 0, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbf{P}_3$

Cevap: a) Değil.

b) Alt vektör uzayı, $T = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) Değil.

d) Değil.

e) Alt vektör uzayı, $T = \{t^3, t^2 + t\}$

4)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin.

a) A matrisinin satır ve sütun uzayını yazınız.

b) A matrisinin sütun uzayı için bir taban bulunuz.

c) $rankA = ?$

d) A matrisinin sıfır uzayını (çekirdeğini) yazınız.

Cevap: a) Satır Uzayı $= span\{(-1, 2, 1, 3, 1), (2, 1, 3, 4, 0), (1, -1, 0, -1, 0), (3, 0, 3, 3, 1)\}$

Sütun Uzayı $= span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $rankA = 3$

d) Sıfır Uzayı $= span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

5) $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan aşağıdaki fonksiyonlar iç çarpım mıdır? Neden?

a) $\langle u, v\rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 5u_2v_2$

b) $\langle u, v\rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = u_2^2v_1 + u_1v_2$

Cevap: a) İç çarpımdır.

b) Değildir.

6) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ vektör kümesinden Gram-Schmidt yöntemi ile ortonormal bir vektör kümesi elde ediniz.

Cevap: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

7) $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ fonskiyonu, $L(u_1, u_2, u_3) = (u_1 + u_2 + 5u_3,\ u_2 + 3u_3,\ u_1 - 2u_2 - 4u_3)$ şeklinde tanımlansın.

a) L'nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

b) L'nin görüntü uzayına (ImL'ye ya da $L(\mathbb{R}^3)$'e) bir taban bulunuz.

c) L'nin sıfır uzayına (ÇekL'ye ya da çekirdeğine) bir taban bulunuz.

d) $rankL =$?

e) Sıfırlık=?

f) L birebir midir?

g) L örten midir?

h) L dönüşümünün standart bazlara göre karşılık matrisini yazınız.

Cevap: a) Size ait.

b) $T_{ImL} = \{(1,0,1),(1,1,-2)\}$

c) $T_{\c{C}ekL} = \{(-2,-3,1)\}$

d) $rankL = 2$

e) Sıfırlık$= 1$

f) L birebir değil.

g) L örten değil.

h)

$$[L]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

8)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin.

a) A matrisinin öz değerlerini bulunuz.

b) Bu öz değerlere ait öz vektörleri ve öz uzayları bulunuz.

c) A matrisi köşegenleştirilebilir bir matris midir? Neden?

d) $P^{-1}AP = D$ eşitliğini sağlayan P tersinir matrisi varsa, P'yi ve D köşegen matrisini bulunuz.

Cevap: a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 6$

b) Öz vektörler: $v_1 = (2,1,0),\ v_2 = (-1,0,1),\ v_3 = (1,-1,2)$

Öz uzaylar: $S_1 = \{a(2,1,0) + b(-1,0,1) \mid \ a,b \in \mathbb{R}\}$

$S_2 = \{a(1,-1,2) \mid \ a \in \mathbb{R}\}$

c) Evet. (Neden?)

d)

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ve

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

9)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin.

a) B matrisinin öz değerlerini bulunuz.

b) Bu öz değerlere ait öz vektörleri ve öz uzayları bulunuz.

c) B matrisi köşegenleştirilebilir bir matris midir? Neden?

d) $P^{-1}BP = D$ eşitliğini sağlayan P tersinir matrisi varsa, P'yi ve D köşegen matrisini bulunuz.

Cevap: a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 4$

b) Öz vektörler: $v_1 = (1, 0, 0), \ v_3 = (1, 3, 9)$

Öz uzaylar: $S_1 = \{a(1, 0, 0) \mid \ a \in \mathbb{R}\}$

$S_2 = \{a(1, 3, 9) \mid \ a \in \mathbb{R}\}$

c) Değildir. (Neden?)

d) Yok.

10)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

simetrik matrisi verilsin.

a) C matrisinin öz değerlerini bulunuz.

b) Bu öz değerlere ait öz vektörleri ve öz uzayları bulunuz.

c) C matrisi köşegenleştirilebilir bir matris midir? Neden?

d) $P^TCP = D$ eşitliğini sağlayan P ortogonal matrisi varsa, P'yi ve D köşegen matrisini bulunuz.

Cevap: a) $\lambda_1 = -2$ $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$

b) Öz vektörler: $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (-1,0,2)$, $v_3 = (2,0,1)$

Öz uzaylar: $S_1 = \{a(0,1,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$S_2 = \{a(-1,0,2) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$S_3 = \{a(2,0,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$

c) Evet. (Neden?)

d)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ve

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$